



۶. اگر بدانیم $\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = a \\ \sin \alpha - \cos \alpha = b \end{cases}$ چه رابطه‌ای بین a و b وجود دارد؟

۷. ثابت کنید کسر $\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + \cot x}$ به ازای هر x به جز $(\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3})$ و $x \neq 0$ همیشه مثبت است.

حسابان ۱

(پایه یازدهم ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. کدام یک از دو قرارداد زیر سود بیشتری برای یک فرد در ازای ۶۴ روز کاری دارد؟

(الف) روزانه به صورت ثابت روزی یک میلیون تومان.

(ب) روز اول یک ریال، روز دوم دو ریال، روز سوم ۴ ریال و هر روز دو برابر روز قبل دریافت کند.

۲. اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 - 2\beta^2 + 4\beta$ را به دست آورید.

۳. مساحت سطح محصور بین نمودار $y = |x - 2| + |x + 1|$ و خط $y = x + 2$ را به دست آورید.

ریاضی ۱

(پایه دهم رشته ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. اگر U مجموعه مرجع باشد و داشته باشیم: $n(U) = 40$ ، $n(A) = 20$ ، $n(B) = 22$ و $n(A \cap B) = 4$ ، در این صورت حاصل $n(A' - B) + (B' - A)$ را به دست آورید.

۲. ثابت کنید جمله‌های دنباله $a_n = 3^n$ در رابطه زیر صدق می‌کند: $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$.

۳. یک دنباله هندسی پیدا کنید که عددهای ۱۲، ۳۲۴ و ۲۶۲۴۴ جمله‌هایی از آن باشند. در ضمن قدر نسبت این دنباله عدد طبیعی است.

۴. سه عددی که مجموعی برابر ۱۳ دارند. یک دنباله هندسی تشکیل داده‌اند. ولی اگر به این سه عدد به ترتیب عددهای ۲، ۷ و ۸ را اضافه کنیم، سه عدد حاصل یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. این سه عدد را پیدا کنید.

۵. درستی رابطه

$$\frac{1 + \tan x + \cot x}{\cos^2 x} - \frac{\cot x}{\sin^2 x} = \sin x \cos x$$

را ثابت کنید.

۲. همهٔ جواب‌های معادله $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$ در $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ را پیدا کنید.

۳. مجموعه جواب‌های معادله $\sum_{i=1}^n \sin ix = n$ ، با فرض $n \geq 3$ را مشخص کنید.

۴. ثابت کنید تابع $f(x) = \sin x^2$ متناوب نیست.

۵. در تابع چندجمله‌ای از درجه n ، آیا می‌توان گفت که نمودار تابع به ازای $n = 3$ همواره محور x ها را قطع می‌کند؟ برای مراتب بالاتر n چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۶. در تقسیم $x^5 + x^3 + 2x - 11$ بر $x + 1$ مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم را مشخص کنید.

هندسه ۳

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حسین کریمی

۱. با فرض $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(الف) حاصل A^{1399} را به دست آورید.

(ب) در ماتریس غیرصفر و غیرهمانی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، چه شرطی بین درایه‌ها برقرار باشد تا داشته باشیم: $A^n = A$

۲. با فرض $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ، حاصل A^2 را به دست آورید. در مورد A^n چه حدسی می‌زنید؟

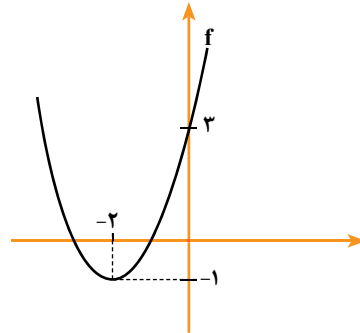
۳. با فرض $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c-4a & d-4b \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} a & b+3a \\ c & d+3c \end{bmatrix}$

مقادیر $|A|$ ، $|B|$ و $|C|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای را حدس می‌زنید.

۴. نمودار تابع درجهٔ دوم $y = f(x)$ در شکل ۱ داده شده است.

(الف) صفرهای تابع f را به دست آورید.

(ب) معادله $f^2(x) - 7f(x) + 6 = 0$ را حل کنید.



شکل ۱

۵. نقاطی روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن‌ها تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

۶. دامنهٔ تابع گویای $f(x) = \frac{x+2}{x^2+ax+b}$ ، مجموعه $\mathbb{R} - \{1\}$ است. مقادیر a و b کدام‌اند؟

۷. اگر $f(-x) + f(2) = -4x^2 + x$ با دامنهٔ \mathbb{R} باشد، نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید.

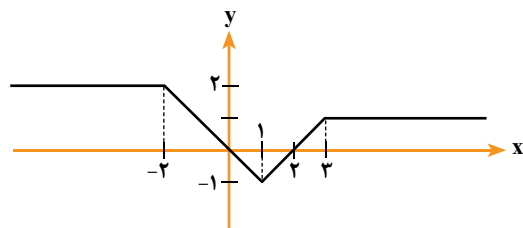
۸. تابع f با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت $y = \max\{x, x^2\}$ تعریف شده است. این تابع را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

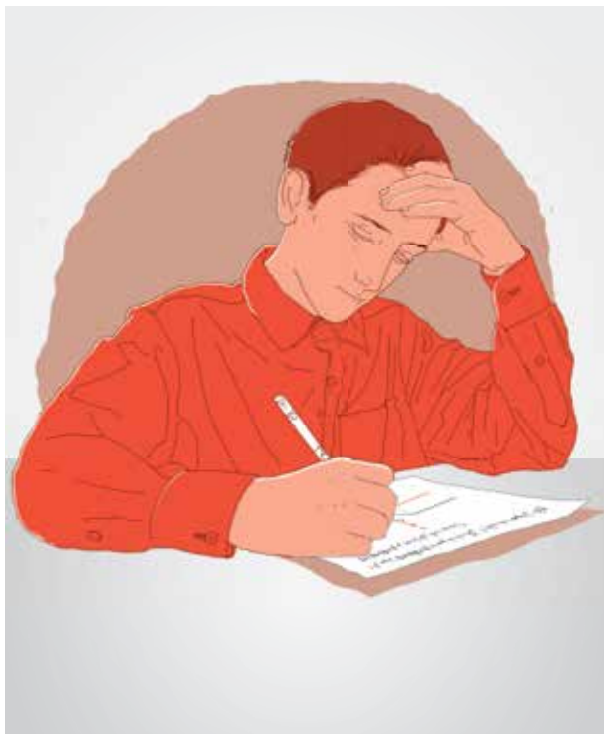
حسابان ۲

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

آزادبه حسین فرزانه

۱. اگر نمودار $y = f(x+1)$ به صورت شکل ۱ باشد، نمودار تابع $y = f(-2x+3)$ در چه بازه‌ای ثابت نیست؟





۳. با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید: $A \times \phi = \phi$

۴. اشکالی در اثبات ادعای زیر وجود دارد. آن را مشخص کنید:

ادعا: هیچ عدد اول و بزرگ‌تر از 5^0 میلیون وجود ندارد.
حالت اول: اگر $n > 5^0$ و زوج باشد، نتیجه می‌گیریم اول نیست. (چرا؟)

حالت دوم: اگر n فرد باشد و بزرگ‌تر از 5^0 میلیون، در این صورت داریم: $a = \frac{n+1}{2}$ و $b = \frac{n-1}{2}$ و $0 < b < a$ هر دو عددهای صحیح هستند (چرا؟) و می‌توان نوشت: $n = a^2 - b^2$.
یعنی: $n = (a-b)(a+b)$ که این تجزیه نشان می‌دهد که n اول نیست!

۵. اگر در یک سال، هفدهم تیرماه سه‌شنبه باشد، دوم فروردین همان سال چه روزی از هفته بوده است؟

۶. اگر x عددی فرد باشد، جواب‌های عمومی معادله هم‌نهمستی زیر را به دست آورید:

$$4x^4 + 11x^2 + 13x \equiv 15 \pmod{15}$$

۷. با فرض اینکه $a^n \mid b^n \Rightarrow a \mid b$ ثابت کنید:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n, a^m \mid b^m \Rightarrow a \mid b$$

۴. شرط برقراری خاصیت جابه‌جایی ضرب دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\text{و } B = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \text{ را به دست آورید.}$$

۵. با فرض $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ نشان دهید:

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1} \quad \text{آیا} \quad (A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

است؟

۶. نشان دهید که دستگاه زیر، فاقد جواب منحصر به فرد است. معین کنید در چه شرایطی بی‌شمار جواب دارد و در چه شرایطی فاقد جواب است.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y + z = b \\ 7x + 4y + 9z = c \end{cases}$$

آمار و احتمال و ریاضیات گسسته

(پایه یازدهم و دوازدهم ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. اگر p گزاره‌ای درست و q ارزش نادرست داشته باشد، و نیز r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$

ب) $(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow p$

ج) $(q \wedge p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

د) $(\sim q \vee r) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$

۲. با استفاده از قوانین بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید (در صورتی که تساوی برقرار نیست، مثال نقض بزنید).

الف) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$

ب) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ج) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$